Úloha 1

podmienky:

Viktor x > 30
Martin x : 2 = k zv. 1
David x : 3 = n zv. 2
Roman x : 5 = p zv. 4

Jeden kvet = 15c

Z Romanovej podmienky vyplýva, že môžeme použiť len čísla končiace sa číslom 4 alebo 9. Martin chce, aby bol počet kvetov nepárny, vďaka čomu vieme, že sa číslo musí končiť len na cifru 9. Keďže čísla musia byť väčšie ako 30 a po rozdelení do trojíc musia zostať 2, vieme že najmenšie vyhovujúce číslo je 59. Následne už zostáva len spraviť 59x0,15 = 8,85.

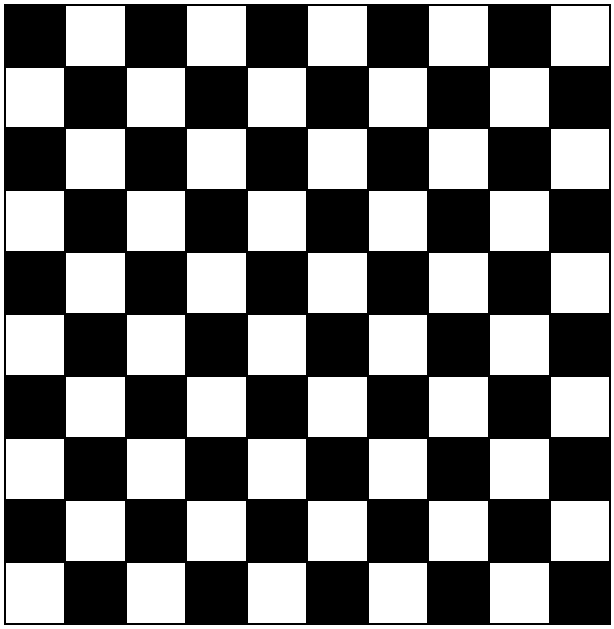
Úloha 2

Všetci z vás, ktorí ste riešili túto úlohu ste mali správnu odpoveď, no niektorí ste nevysvetlili svoj postup, ktorým ste sa dopracovali ku výsledku. Je potrebné, aby ste svoje riešenie vysvetlili logickými postupmi a úvahami, nemôžete sa len spoliehať na intuíciu, že úloha nemá riešenie. Pokiaľ už máte podozrenie, že úloha riešenie nemá, tak sa pokúste vo svojom riešení objasniť, prečo si to myslíte.

Túto úlohu bolo možné riešiť technikou, ktorá sa nazýva dôkaz sporom. Ide o spôsob dôkazu matematického tvrdenia, kde sa najskôr vytvorí predpoklad a postupnými logickými úvahami sa príde ku záveru, že predpoklad nie je správny, a preto platí práve opačné tvrdenie, než bol predpoklad.

Riešenie tejto úlohy začneme tým, že budeme predpokladať, že existuje nejaké vydláždenie tabuľky s rozmermi 10 × 10 pomocou dlaždice zo zadania. Naším cieľom je ukázať, že tento predpoklad je nesprávny, a preto nie je možné túto tabuľku vydláždiť daným spôsobom. Vieme, že celá tabuľka má 100 políčok a jedna dlaždica zaberá 4 políčka. Preto na vydláždenie budeme potrebovať 100/4 = 25 kusov dlaždíc zo zadania.

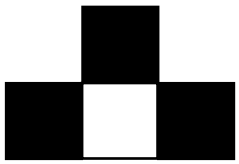
Teraz si celú tabuľku šachovnicovo ofarbíme, takže bude vyzerať nejako takto :



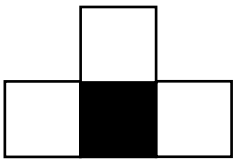
Čo sa stane teraz, pokiaľ na takúto šachovnicu budeme ukladať naše dlaždice ? Môžu nastať 2 prípady. 1. prípad je, že dlaždica zakryla 3 čierne políčka a jedno biele políčko. 2. prípad je, že dlaždica zakryla 3 biele políčka a jedno čierne políčko. Je to spôsobené tým, že stredné políčko dlaždice(to, ktoré susedí so všetkými ostatnými), bude mať opačnú farbu, než všetky ostatné políčka, ktoré s ním susedia, pretože pri šachovnicovom ofarbení sa aj v riadkoch aj stĺpcoch pravidelne striedajú čierne a biele políčka.

Nech dlaždicu uložíme akýmkoľvek spôsobom do tabuľky, tak vždy bude vyzerať ako jedna z nasledujúcich 2 možností :

Dlaždica typu 1



Dlaždica typu 2



Teraz si tieto 2 typy dlaždíc označíme. Tá, ktorá má 3 čierne políčka a 1 biele políčko nazveme dlaždica typu 1 a tú druhú nazvime dlaždica typu 2.

Označme si počet dlaždíc typu 1, ktoré sme použili pri dláždení tabuľky ako x. Tento počet dlaždíc typu 1 musí byť vyjadrený prirodzeným číslom. Vieme, že všetkých dlaždíc oboch typov je spolu 25, preto počet dlaždíc typu 2 môžeme vyjadriť ako 25 – x. Vždy, keď umiestnime dlaždicu typu 1, tak prekryjeme 3 čierne a 1 biele políčko. Naopak, keď umiestnime dlaždicu typu 2, tak prekryjeme 3 biele a 1 čierne políčko. V našej tabuľke máme 50 čiernych políčok, takže po uložení dlaždíc musíme prekrývať 50 čiernych políčok. Počet dlaždíc typu 1 je x a každá z nich zakrýva 3 čierne políčka, takže dlaždice typu 1 celkovo zakrývajú 3x čiernych políčok. Počet dlaždíc typu 2 je 25 – x a všetky zakrývajú 1 čierne políčko, takže spolu zakrývajú 25 – x čiernych políčok. Súčet zakrytých čiernych políčok musí byť rovný 50, pretože v tabuľke máme 50 čiernych políčok. Teraz si môžeme spísať rovnicu, ktorá nám vyjadruje počet zakrytých čiernych políčok.

$$3x + 25 - x = 50$$

Po úprave dostávame 2x = 25, z čoho dostávame riešenie x = 12,5. Z tejto rovnice sme zistili, že dlaždíc typu 1 musí byť 12,5. My však vieme, že počet týchto dlaždíc musí byť vyjadrený prirodzeným číslo, pretože tieto dlaždice nie je možné deliť. Tým pádom sme prišli ku sporu, pretože nemôže súčasne platiť, že počet dlaždíc typu 1 je vyjadrený prirodzeným číslom a zároveň je vyjadrený aj ako 12,5 ,čo rozhodne nie je prirodzené číslo.

Keďže sme našli spor, tak teraz vieme povedať, že náš predpoklad, že tabuľku 10 × 10 dokážeme vyplniť danými dlaždicami je nesprávny, takže tabuľku 10 × 10 nedokážeme vyplniť danými dlaždicami.

<u>Úloha 3</u>

Každý deň vylezie 2 km, avšak v noci spadne o 1 km späť, takže za každý deň a následnú noc má posun 1 km. Za 98 dní a 98 nocí vylezie 98 km. Na 99. deň vylezie 2 km a dosiahne vrchol 100 km, už nezostáva na noc. Takže jeho 98. noc, keď pozoroval spln bola posledná. Máme 97 nocí, keď pozoroval ešte x ďalších splnov. Pretože medzi jednotlivými splnmi prejde 28 dní, x zistíme ako 97/28=3 (so zvyškom) Pozoroval teda ešte 3 ďalšie splny. Aby sme zistili prvý, vypočítame 3*28=84. Už len odčítame 84 dní od 5. mája a získame dátum 11. Februára. Dôležité je nezabudnúť, že je rok 2020, takže február má 29 dní. Správne riešenie je aj ak sa počítalo, že spln je každú 29. noc, v tom prípade to vychádza na 8. februára.

Úloha 4

Táto úloha sa riešila vypísaním všetkých možností. Začnem s 3x50 a potom začnem postupne rozkladať mince na čo najmenšie až do bodu kedy prídem k riešeniu 15x10. Správna odpoveď tejto úlohy je teda 18.

1. 3x50
2. 2x50 + 2x20 + 10
3. 2x50 + 1x20 + 3x10
4. 2x 50 + 5x10
5. 50 + 5x20
6. 50 + 4x20 + 2x10
7. 50 + 3x20 + 4x10
8. 50 + 2x20 + 6x10
9. 50 + 1x20 + 8x10
10. 50 + 10x10
11. 7x20 + 10
12. 6x20 + 3x10
13. 5x20 + 5x10
14. 4x20 + 7x10
15. 3x20 + 9x10
16. 2x20 + 11x10
17. 1x20 + 13x10
18. 15x10

Úloha 5

8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 = 20 160

Toto je najjednoduchšia rovnica aká sa dala zostaviť.

Keďže Janka si vyberá z 8 tričiek, 6 nohavíc a 4 svetrov, počet jej možností vypočítame rovnicou 8 * 6 * 4 = 192

Keď si Janka vyberie, Danka má na výber z každého o jedno menej. Bude teda vyberať zo 7 tričiek, 5 nohavíc a 3 svetrov. Počet jej možností vypočítame rovnicou 7 * 5 * 3 = 105

Následne tieto dva údaje vynásobíme, keďže v každej Jankinej možnosti sa skrýva 105 Dankiných možností. Rovnica teda bude 192 * 105 = 20 160

Odpoveď: Sestry majú na výber 20 160 možností.

Úloha 6

Zápis: s=1500m v1= 4m/s v2= 5m/s v3= 6m/s

A) Vychádzame zo základného vzorca na rýchlosť, ktorý je v=s/t, odvodením dostanem t=s/v. Dosadením rýchlosti a dráhy pri každom študentovi nám vyšlo: t1=s/v1 t2=s/v2 t3=s/v3 t1=1500/4 t2=1500/5 t3=1500/6 t1= 375s=6.25min=6min15s t2=300s=5min t3=250s=4,167min=4min10s

B) Štafeta 3x1500m znamená, že každý z troch študentov odbehol 1500m. Stačilo teda sčítať časy z úlohy A). t=t1+t2+t3 t=6.25min+5min+4,167min t=15,4167min=15min25

Úloha 7

Keď spojíme 200 g prvej zliatiny a 150 g druhej zliatiny, budeme mať 350 g novej zliatiny.
Množstvo medi: 200 g × 0,3 (30% medi v prvej zliatine) + 150 g × 0,5 (50% medi v druhej zliatine) = 60 g + 75 g = 135 g medi
Množstvo hliníka: 200 g × 0,7 (70% hliníka v prvej zliatine) + 150 g × 0,5 (50% hliníka v druhej zliatine) = 140 g + 75 g = 215 g hliníka
V novej zliatine bude 135 gramov medi a 215 gramov hliníka.

Úloha 8

1 týždeň = ((120 : 4) * 3) + 15 = 90 + 15 = 105

2 týždeň = ((105: 4) *3) + 15 = 78 +15 = 93

3 týždeň = ((93:4) * 3) + 15 = 69 +15 = 84

4 týždeň = ((84:4) * 3) + 15 = 63 +15 = 78

5 týždeň = ((78:4) * 3) + 15 = 58 +15 = 73

6týždeň=((73:4)*3)+15=54+15 =69

Odpoveď: Po 6 týždňoch v obchode ostane 69 hračiek

(Pri rôznom zaokrúhľovaní mohli vyjsť trochu odlišné počty)

Chválime tých, ktorí prišli na to, že hračky sa vlastne nedajú “krájať,” ciže úloha de facto nemá riešenie. Samozrejme, sme uznali aj zaokrúhľovanie.

Úloha 9

Tým pádom, že o Dávidovi nemáme informácie tak si ho označíme za neznámu x. Na základe zadania si určíme, že Viktor má 2x-2, Martin x+2 rožkov(kvôli tomu, Martin 2 rožky Viktorovi ukradol) a Roman(2x-2)-3. Taktiež vieme že spolu mali 13 rožkov. Toto nám stačí na to aby sme si zostrojili jednoduchú rovnicu :

$x+(2x-2)+(x+2)+(2x-2)-3=13$

$6x-5=13$

$6x=13+5$

$6x=18$

$x=3$

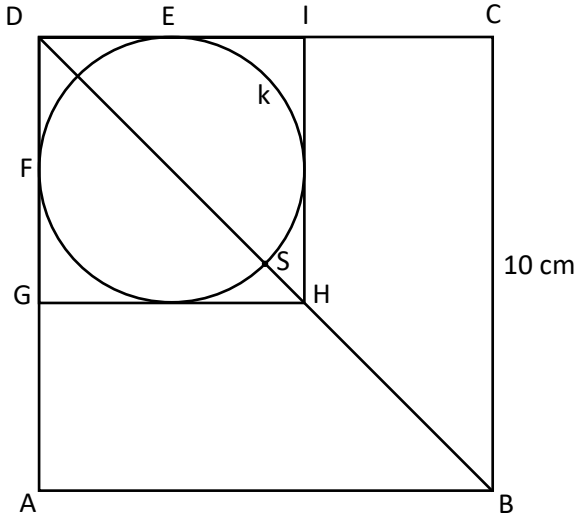
Po vypočítaní nám vyšlo, že hodnota x = 3. Nasledovne si vieme určiť finálnu hodnotu rožkov pre každého zo skupiny. Týmto dostaneme, že :

Dávid zjedol 3 rožky, Viktor zjedol 4 rožky, Martin zjedol 5 rožkov a Roman zjedol 1 rožok.

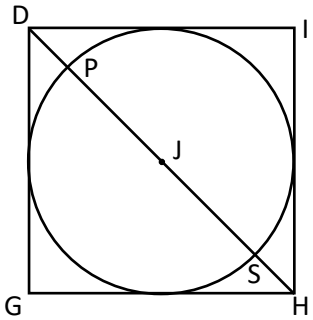
Môžeme si skontrolovať či máme správny výsledok tým, že sčítame hodnoty, ktoré nám pre chalanov vychádzajú. Tým pádom by nám malo spolu vychádzať 13 rožkov (3+4+5+1=13).

Úloha 10

Najskôr si do obrázka zo zadania dorysujeme štvorec DGHI, ktorému je kružnica k jeho vpísanou kružnicou. Taktiež si dorysujeme uhlopriečku BD, ktorá prechádza bodmi S a H. Bodom S, pretože uhlopriečka štvorca vždy prechádza cez jeho stred a bodom H prechádza, pretože uhol ∢ ADB je rovnako veľký ako uhol GDH, pričom oba majú 45° a bod G leží na ramene AD uhla ∢ ADB a bod H leží na ramene DB uhla ∢ ADB.



Teraz sa zamerajme na štvorec DHGI, v ktorom je vpísaná kružnica k. Stred tejto kružnice k si označme ako J.



Vieme, že úsečka DS je polovica z úsečky DB, pretože bod S leží presne v polovici uhlopriečky DB. Teraz potrebujeme zistiť dĺžku úsečky DS. Najskôr teda zistíme dĺžku úsečky DB. Táto úsečka je uhlopriečkou štvorca ABCD. Zoberme si teraz trojuholník ABD. Ide o pravouhlý trojuholník, pretože je to časť štvorca ABCD rozdelená jeho uhlopriečkou BD. V trojuholníku ABD preto aplikujeme pytagorovu vetu. Dostávame : $(AB)^2 + (DA)^2 = (BD)^2$. Po dosadení : $10^2 + 10^2 = (BD)^2$. Odtiaľ dostávame $(BD)^2 = 200$, čiže BD = $\sqrt{200}$ cm. Vieme, že dĺžka úsečky SD je polovica z dĺžky úsečky BD, preto platí SD = $\frac{\sqrt{200}}{2}$ cm.

Dĺžka strany štvorca DHGI je 2r, kde r je polomer kružnice k. Bod, kde sa prekríži úsečka DJ a kružnica k označme P. Platí, že DP + PS = SD. Dĺžka úsečky PS nie je nič iné, než priemer kružnice k, takže platí : PS = 2r. Vieme už, že dĺžka úsečky SD je $\frac{\sqrt{200}}{2}$. Teraz nám už len chýba dĺžka úsečky DP. Tú vypočítame ako rozdiel dĺžok úsečiek JD – JP. Dĺžka úsečky JD je polovica z uhlopriečky HD. Dĺžku úsečky HD zistíme podľa pytagorovej vety. Platí : $(HD)^2 = (GH)^2 + (DG)^2$. Vieme, že dĺžka úsečky GH a taktiež DG je rovná priemeru kružnice k, čiže 2r. Po úprave dostávame : $(HD)^2 = (2r)^2 + (2r)^2$. Ďalej dostávame : $(HD)^2 = 4r^2 + 4r^2$, teda $(HD)^2 = 8r^2$, po odmocnení HD = $r\sqrt{8}$. Keďže platí, že úsečka JD má polovičnú

dĺžku, než úsečka HD, tak platí JD = $\frac{r\sqrt{8}}{2}$. Vieme, že platí DP = JD – JP. JP je vlastne dĺžka polomeru kružnice k, čiže r. Po dosadení : DP = $\frac{r\sqrt{8}}{2} - r$.

Vieme, že platí : DP + PS = SD. Dostávame rovnicu $\frac{r\sqrt{8}}{2} - r + 2r = \frac{\sqrt{200}}{2}$. Po úprave : $\frac{r\sqrt{8}}{2} + r = \frac{\sqrt{200}}{2}$. Teraz požijeme vynímanie pred zátvorku a vyjmeme r. Dostávame : $r\left(\frac{\sqrt{8}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{200}}{2}$. Po vydelení zátvorkou $\left(\frac{\sqrt{8}}{2} + 1\right)$. Dostávame : $r = \frac{\frac{\sqrt{200}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{8}}{2}+1\right)}$. Po vyčíslení $r = 2{,}9289$ cm, alebo zaokrúhlene $r = 2{,}93\ cm$.